Análisis Matemático

Ejercicios resueltos

Evau 2025

by S3r4

Modelo. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{5x-1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad de la función en $\mathbb{R}$.

b) Estudie los extremos relativos de la función en el intervalo $(1, 3)$.

c) Calcule el área encerrada por la función y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 3$.

Solución:

- **a) Continuidad:** Para $x \neq 2$, las funciones son continuas por ser una polinómica y una raíz de índice par con radicando positivo . En $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2^-} (x^2 - 6x + 11) = 3; \quad \lim_{x\to 2^+} \sqrt{5x-1} = 3; \quad f(2) = 3$$

  Al coincidir los límites laterales con el valor de la función, es **continua en** $\mathbb{R}$.

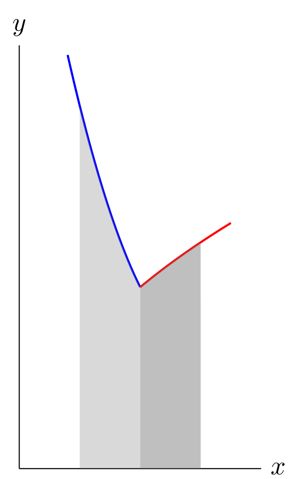
- **b) Extremos relativos:** En $(1, 2)$, $f'(x) = 2x - 6$. Como $x < 2$, $f'(x) < 0$ (decreciente). En $(2, 3)$, $f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x-1}} > 0$ (creciente) . Existe un **mínimo relativo en** $x = 2$.

- **c) Área:**

$$A = \int_1^2 (x^2 - 6x + 11)dx + \int_2^3 \sqrt{5x-1}dx$$

$$A = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 11x\right]_1^2 + \left[\frac{2}{15}(5x-1)^{3/2}\right]_2^3 = \frac{13}{3} + \frac{2}{15}(14\sqrt{14} - 27)$$

  Resultado: $A = \frac{11}{15} + \frac{28\sqrt{14}}{15} \approx 7{,}71 \text{ u}^2$.



$x = 2$ (Mínimo)

Modelo: Dada la función $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, se pide:

a) Estudiar la paridad de la función $g(x) = f(x \cdot f(x))$.

b) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+3f(x)}-2}{x}$.

c) Calcular $\displaystyle\int_0^1 x \cdot f(x)dx$.

Solución:

- **a) Paridad:** Como $f(x)$ es impar ($f(-x) = -f(x)$)

  $$g(-x) = f((-x)\cdot f(-x)) = f((-x)\cdot(-f(x))) = f(x\cdot f(x)) = g(x)$$

  La función $g(x)$ **es par**:.

- **b) Límite:** Aplicando la regla de L'Hôpital ya que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+3f(x)}-2}{x} = \frac{0}{0}$:

  $$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{3f'(x)}{2\sqrt{4+3f(x)}}}{1} = \frac{3\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\cos(0)}{2\sqrt{4+3\sin(0)}} = \frac{3\pi/2}{4} = \boldsymbol{\frac{3\pi}{8}}$$

- **c) Integral:** Integrando por partes ($u = x$, $dv = \sin(\frac{\pi}{2}x)dx$):

  $$\int_0^1 x\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \left[-\frac{2x}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{4}{\pi^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{4}{\pi^2}}$$

Ordinaria Un muro rectangular de la biblioteca pública del barrio se va a pintar con la ayuda de unos grafiteros.

La dimensión del muro es de 3 metros de alto y 12 metros de largo. Colocando la esquina inferior izquierda del muro en el origen de coordenadas, se va a utilizar la curva $f(x) = \cos(\frac{\pi x}{9}) + 2$ para diferenciar dos regiones que serán pintadas con dos colores distintos. Se sabe que con un bote de spray se pueden pintar 3 metros cuadrados de superficie.

a) (0.75 puntos) Halle el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x)$ en el intervalo $[0, 12]$. ¿Está la curva en este intervalo $[0, 12]$ contenida completamente en el muro?

b) (1.25 puntos) Halle el área que tienen que pintar de cada color.

c) (0.5 puntos) ¿Cuántos botes de spray se tienen que comprar como mínimo para pintar toda el área bajo la curva f (x)?

Solución:

a) Valores extremos y posición de la curva

Sabemos que la función $-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$. Por tanto:

- **Valor máximo:** $1 + 2 = 3$ m.
- **Valor mínimo:** $-1 + 2 = 1$ m.

Puesto que el muro tiene exactamente 3 m de altura, la curva está **completamente contenida** en el intervalo vertical $[0, 3]$ del muro.

Sabemos que el valor mínimo de la función coseno, $cos(\theta)$, es -1. Esto ocurre cuando el ángulo ϑ es un múltiplo impar de π (es decir, $\pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$):

$cos(\theta) = -1 \Longleftrightarrow \theta = (2k+1)\pi, k \in Z$

2. Resolución para x

Igualamos el argumento de nuestra función a π para encontrar el primer valor dentro del intervalo de interés (el muro tiene 12 metros de largo, por lo que $x \in [0, 12]$):

$\frac{\pi x}{9} = \pi$

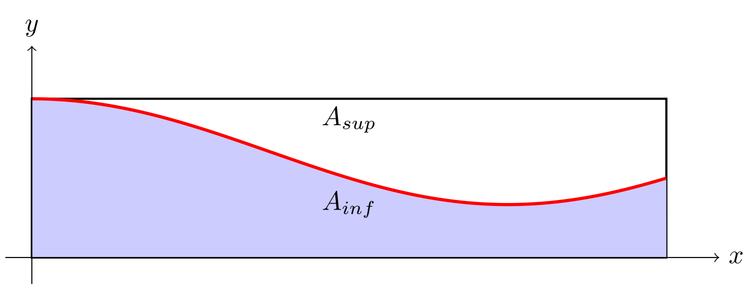
Dividiendo ambos lados por π:

$\frac{x}{9} = 1 \Longrightarrow x = 9$

Para $x = 9 : f(9) = cos(\frac{9\pi}{9}) + 2 = cos(\pi) + 2 = -1 + 2 = 1.$

Como el intervalo de estudio es $[0, 12]$, el único valor de x donde se alcanza el mínimo absoluto de 1 metro es $x = 9$.

En este punto ($x = 9$), el muro de la biblioteca tiene la altura mínima de la pintura de la región inferior, situada a exactamente 1 metro del suelo.



b) Áreas de cada región

Calculamos el área bajo la curva (región inferior) mediante integración:

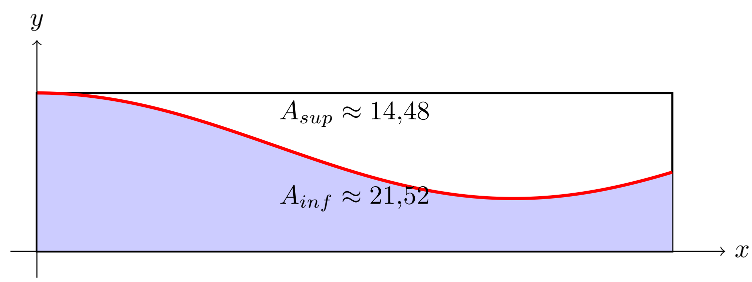
$$A_{inf} = \int_0^{12} \left(\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2\right) dx = \left[\frac{9}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2x\right]_0^{12}$$

Evaluando en los límites:

$$A_{inf} = \frac{9}{\pi}\sin\left(\frac{12\pi}{9}\right) + 24 - 0 = 24 + \frac{9}{\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \approx \mathbf{21{,}52}\ \mathrm{m}^{\mathbf{2}}$$

El área de la región superior se obtiene por diferencia con el área total del muro (36 m^2):

$$A_{sup} = 36 - 21{,}52 = \mathbf{14{,}48}\ \mathrm{m}^{\mathbf{2}}$$



c) Cálculo de botes de spray

Para cubrir el área inferior de 21,52 m^2:

$$\text{N}^{\text{o}}\ \text{botes} = \frac{21{,}52\ \mathrm{m}^2}{3\ \mathrm{m}^2/\text{bote}} \approx 7{,}17$$

Es necesario comprar un mínimo de **8 botes**.

Ordinaria coincidencias Para la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$, se pide:

a) (0.75 ptos)Determinar su dominio y estudiar su paridad.

b) (1 pto)Calcular los límites: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) + x)$.

c) (0.75 ptos)Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ para $x = 1$.

Solución:

- **a) Dominio y Paridad:** Para el dominio, el radicando debe ser no negativo: $x^2 + 3x \geq 0 \implies x(x+3) \geq 0$. Analizando los signos en los intervalos $(-\infty, -3]$, $[-3, 0]$ y $[0, \infty)$, obtenemos: **Dominio:** $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -3] \cup [0, \infty)$.

  Estudio de paridad: $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 3(-x)} = \sqrt{x^2 - 3x}$. Como $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$, la función **no tiene paridad** (ni par ni impar).

- **b) Límites al infinito:** 1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{x}$. Hacemos el cambio $x = -t$ con $t \to \infty$:

  $$\lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{(-t)^2 + 3(-t)}}{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{t^2 - 3t}}{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t\sqrt{1 - 3/t}}{-t} = -\mathbf{1}$$

  2. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+3x} + x)$. Multiplicamos por el conjugado:

  $$\lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3x} + x)(\sqrt{x^2+3x} - x)}{\sqrt{x^2+3x} - x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 + 3x - x^2}{\sqrt{x^2+3x} - x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x} - x}$$

  Haciendo de nuevo $x = -t$:

  $$\lim_{t\to\infty} \frac{-3t}{\sqrt{t^2 - 3t} - (-t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{-3t}{t\sqrt{1 - 3/t} + t} = \frac{-3}{1+1} = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$

- **c) Recta tangente en $x = 1$:** Punto de tangencia: $f(1) = \sqrt{1^2 + 3(1)} = \sqrt{4} = 2$. Derivada: $f'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}$. Pendiente: $m = f'(1) = \frac{2(1)+3}{2\sqrt{4}} = \frac{5}{4}$. Ecuación: $y - 2 = \frac{5}{4}(x - 1) \implies \mathbf{y = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}}$.

Ordinaria coincidencias

Se considera la función $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2}{x^2 + 9}$. Calcule la primitiva $F(x)$ de $f(x)$ tal que $F(0) = \ln 3$.

Solución: Realizamos la división de polinomios ya que el grado del numerador es mayor:

$$\frac{x^3 - x^2}{x^2 + 9} = x - 1 + \frac{-9x + 9}{x^2 + 9}$$

Calculamos la integral indefinida:

$$\int f(x)dx = \int (x - 1)dx - 9\int \frac{x}{x^2 + 9}dx + 9\int \frac{1}{x^2 + 9}dx$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - x - \frac{9}{2}\ln(x^2 + 9) + \frac{9}{3}\text{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

Utilizamos la condición inicial $F(0) = \ln 3$:

$$0 - 0 - \frac{9}{2}\ln(9) + 3\text{arctg}(0) + C = \ln 3$$

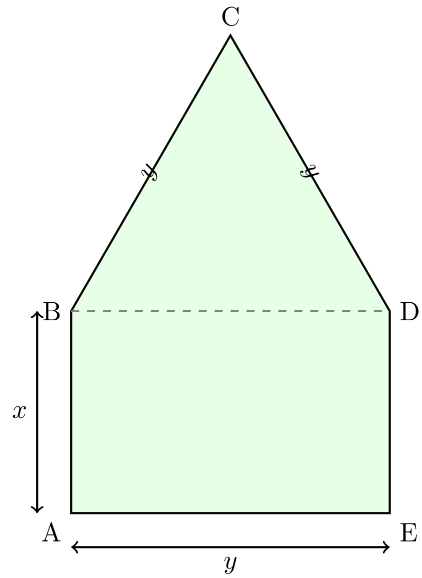
Como $\ln(9) = \ln(3^2) = 2\ln 3$:

$$-9\ln 3 + C = \ln 3 \implies C = 10\ln 3$$

Resultado: $F(x) = \dfrac{x^2}{2} - x - \dfrac{9}{2}\ln(x^2 + 9) + 3\text{arctg}\left(\dfrac{x}{3}\right) + 10\ln 3.$

Extraordinaria Un agricultor delimita una parcela con 120 m de valla. La forma es un pentágono $ABCDE$ donde $ABDE$ es un rectángulo y BCD es un triángulo equilátero exterior al rectángulo. ¿A qué distancia x del vértice A deben estar B y E para maximizar el área?

Solución



1. **Perímetro:** $P = 2x + 3y = 120 \implies x = 60 - 1{,}5y$.

2. **Área Total:** $A = x \cdot y + \frac{\sqrt{3}}{4}y^2$.

El área del rectángulo es xy y la del triangulo equilátero es $\frac{\sqrt{3}}{4}y^2$

3.Como $x = (120 - 3y)/2$ e y tienen que ser mayor que cero, $y \in (0, 40)$.

Sustitución: $A(y) = 60y - 1{,}5y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}y^2$.

4. **Optimización:** $A'(y) = 60 - 3y + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0$.

Resolviendo, obtenemos el valor de la base $y_0 = \frac{120}{6-\sqrt{3}} = \frac{40}{11}(6 + \sqrt{3})$ la derivada anterior se anula,

además si $y < y_0 \Rightarrow A'(y) > 0$, si $y > y_0 \Rightarrow A'(y) < 0$. Como $y_0 \in (0, 40)$ porque $6 + \sqrt{3} < 11$, se sabe que y_0

es un máximo absoluto en el intervalo $(0, 40)$.

Luego $y = \frac{40}{11}(6 + \sqrt{3}) \approx 28{,}11$ metros. La distancia buscada desde el vértice A es:

$$\mathbf{x = 60 - 1{,}5(28{,}11) \approx 17{,}84} \text{ metros}$$

Extraordinaria coincidentes

Sean $f(x) = \frac{e}{e^x - e}$ y $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

a) **Límite:** $\lim_{x\to 1}(f(x) - g(x))$. Operando la resta: $\lim_{x\to 1} \frac{ex - e^x}{(e^x - e)(x-1)}$. Aplicando la Regla de L'Hôpital dos veces:

$$\lim_{x\to 1} \frac{e - e^x}{xe^x - e} = \lim_{x\to 1} \frac{-e^x}{e^x + xe^x} = \frac{-e}{2e} = -\frac{1}{2}$$

b) **Crecimiento:** $f'(x) = \frac{-e^{x+1}}{(e^x - e)^2}$. Como el numerador es siempre negativo y el denominador positivo, $f'(x) < 0 \ \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$. La función es **estrictamente decreciente** en $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

c) **Asíntotas:** $h(x) = g(x) + g(-x) = \frac{2}{x^2 - 1}$.

- Verticales: $x = 1, x = -1$.
- Horizontales: $y = 0$ (ya que $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$).

Extraordinaria coincidentes

Sea la parabola gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 4$.

a)(1 punto) Halle el área de la región acotada delimitada por $y = 0$ y la grafica de la función $f(x)$.

b) (1.5 puntos) Halle las dimensiones del rectángulo de mayor área apoyado sobre el eje OX que se puede inscribir en la parábola de manera que los lados sean paralelos dos a dos con los ejes de coordenadas.

¿Cual es el área de dicho rectángulo?

Solución

a)Área bajo la curva:

$$A = \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^{2} = \frac{32}{3} \text{ u}^2$$

b)Rectángulo de área máxima: Definimos $A(x) = 2x(-x^2+4) = -2x^3 + 8x$.

Derivando: $A'(x) = -6x^2 + 8 = 0 \implies x = \sqrt{4/3}$.

- Base: $4/\sqrt{3}$.
  - Altura: $8/3$.
  - Área máxima: $\frac{32\sqrt{3}}{9} \approx 6{,}16 \text{ u}^2$.